OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2012
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. Să se demonstreze că $\frac{1}{(2a+b)c^3}+\frac{1}{(2b+c)a^3}+\frac{1}{(2c+a)b^3}\geq 1$, pentru orice numere reale *a*, *b*, *c*, cu $a,b,c>0$ şi $abc=1$.

Dan Popescu, Suceava

<u>Soluţie.</u> Condiţia $abc=1$ permite substituţia $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, în urma căreia trebuie să dovedim inegalitatea $\frac{xyz^3}{x+2y}+\frac{x^3yz}{y+2z}+\frac{xy^3z}{z+2x}=\frac{z^2}{x+2y}+\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}\geq 1$. Cu inegalitatea Bergström, $\sum\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{\left(\sum x_k\right)^2}{\sum y_k}$, $x_k\in\mathbb{R}$, $y_k\in(0,\infty)$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, egalitatea obţinându-se pentru $\frac{x_k}{y_k}$ constant, $k=\overline{1,n}$, se deduce $\sum\frac{z^2}{x+2y}\geq\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x+2\sum y}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{3\left(\sum x\right)}=\frac{\sum x}{3}\geq\sqrt[3]{\Pi x}=1$. Egalitatea în inegalitatea enunţului se obţine pentru $a=b=c=1$.

Barem.

Rescrie inegalitatea $\frac{xyz^3}{x+2y}+\frac{x^3yz}{y+2z}+\frac{xy^3z}{z+2x}=\frac{z^2}{x+2y}+\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}\geq 1$	3 p
Scrie inegalitatea Bergström..	1 p
Finalizare $\sum\frac{z^2}{x+2y}\geq\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x+2\sum y}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{3\left(\sum x\right)}=\frac{\sum x}{3}\geq\sqrt[3]{\Pi x}=1$	3 p

2. O mulţime de numere naturale $A\subset\mathbb{N}^*$, având cel puţin două elemente, spunem că este *"acceptabilă"* dacă pentru orice $a,b\in A, a<b$, rezultă *a* divide *b*.

a) (4p) Să se determine numărul mulţimilor *"acceptabile"*, care au cel mai mare element egal cu 2012.

b) (3p) Să se determine numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o mulţime *"acceptabilă"*, care are toate elementele mai mici decât 2012.

Cristian Amorăriţei, Suceava

<u>Soluţie.</u> a) Deoarece $2012=2^2\cdot 503$, avem $|D_{2012}|=6$.

a) Fie $n=|A|$. Căutăm mulţimile ordonate de forma $\{a_1,a_2,...,a_n\}$, cu $a_i / a_{i+1}, \forall i=\overline{1,n-1}$ şi $a_n=2012$.

Dacă $n=2\Rightarrow A=\{a_1,2012\}, a_1\in D_{2012}\setminus\{2012\}\Rightarrow$ avem 5 mulţimi cu două elemente.

Dacă $n=3\Rightarrow A=\{a_1,a_1a',2012\}$. Deosebim două cazuri:

i) $a_1=1\Rightarrow a'\in D_{2012}\setminus\{1,2012\}\Rightarrow 4$ mulţimi.

ii) $a_1>1$. În acest caz, singurele mulţimi posibile sunt $\{2,4,2012\},\{2,1006,2012\}$ şi $\{503,1006,2012\}$. Deci obţinem 3 mulţimi. În total avem 7 mulţimi cu trei elemente.

Dacă $n=4\Rightarrow A=\{a_1,a_1a',a_1a'a'',2012\}$. Obţinem 3 mulţimi cu 4 elemente şi anume $\{1,2,4,2012\},\{1,2,1006,2012\},\{1,503,1006,2012\}$.

Dacă $n\geq 5$, imposibil.

În total sunt $5+7+3=15$ mulţimi.

b) $2012>a_n\geq 2a_{n-1}\geq 2^2a_{n-2}\geq ...\geq 2^{n-1}a_1\geq 2^{n-1}\Rightarrow 2^{n-1}<2012\Rightarrow n-1\leq 10\Rightarrow n\leq 11$. Un exemplu de astfel de mulţime cu 11 elemente este $\{1,2,2^2,...,2^{10}\}$.

Barem.

a) $2012=2^2\cdot 503$	1p

Determină numărul submulţimilor cu 1 sau 2 elemente…………………………………	1p
Determină numărul submulţimilor cu 3 elemente………………………………………	1p
Determină numărul submulţimilor cu 4 elemente, finalizare………..……………………	1p
b) Demonstrează $n \le 11$ ………………………………………………………………..	2p
Dă un exemplu de mulţime cu 11 elemente…………………………………………….	1p

3. Fie ABC un triunghi şi punctele $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$ astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$.

a) (3p) Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

b) (4p) Dacă Q este mijlocul lui $[PN]$ şi D este mijlocul lui $[BC]$, să se arate că $DQ \parallel AM$.

***

Soluţie. a) Fie G centrul de greutate al trunghiului ABC şi $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$. Atunci avem $\overrightarrow{GM} = \frac{\overrightarrow{GB} + k\overrightarrow{GC}}{1+k}, \overrightarrow{GN} = \frac{\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GA}}{1+k}, \overrightarrow{GP} = \frac{\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GB}}{1+k}$. Se obţine $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, deci G este centrul de greutate al triunghiului MNP.

b) $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \Rightarrow DQ \parallel AM$.

Barem.

a) Deduce relaţiile $\overrightarrow{GM} = \frac{\overrightarrow{GB} + k\overrightarrow{GC}}{1+k}, \overrightarrow{GN} = \frac{\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GA}}{1+k}, \overrightarrow{GP} = \frac{\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GB}}{1+k}$ ………………………	1p
G centru de greutate, rezultă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ………………………………………………	1p
Finalizare $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, de unde concluzia……………………………	1p
b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right), \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN}\right)$	1p
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC}\right)$	1p
Obţine $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \Rightarrow QD \parallel AM$	2p

4. În triunghiul ABC, bisectoarele vârfurilor A, B şi C intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele $A_1, B_1,$ respectiv C_1. Să se demonstreze relaţia vectorială $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{HI}$, unde H este ortocentrul triunghiului şi I este centrul cercului înscris.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Putem scrie $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$. Cum $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, rezultă că este suficient să demonstrăm relaţia $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{HI}$.

Dar $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \left(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}\right) - \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.(1) Cum H este ortocentrul tiunghiului ABC şi I este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$, aplicând relaţia lui Sylvester în cele două triunghiuri şi revenind în relaţia (1), obţinem concluzia.

Barem.

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$. ……………………………………………..	1p
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1}$ ………………………………..	1p
$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \left(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}\right) - \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$………………………………	1p
I este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$ ……………………………………………………	1p
Aplică relaţia lui Sylvester în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ ……………………………..	2p
Finalizare………………………………………………………………………………	1p

Notă:

Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.